Capítulo 1

Álgebra Vectorial

1.1. Fundamentos

1.1.1. Ciencia matemática

En el *espacio matemático* [1, p. 203] [2, p. 10] los datos, por su aplicación en física (magnitud física y su descripción matemática) [3, p. 52] [4, p. 120] [5, p. 129] [6, p. 50] [4, p. 120], son clasificados en dos categorías: campo escalar y espacio vectorial.

Definición 1.1 (escalar)**.** Un conjunto cuyos elementos tienen un solo atributo: una *magnitud*; se llama ***campo escalar*** $\mathbb{K}$.

Math hackers note: La asignación de símbolo $\mathbb{K}$ (Definición 1.1) se establecio considerando la simbología de: [7, p. 1], [8, p. 1], [9, p. 167] y [10, p. 20].

1.1.2. Espacio vectorial

Definición 1.2 (espacio)**.** Es $\mathbb{V} \neq \varnothing$ un ***espacio vectorial*** (también llamado *espacio lineal* [11, p. 11] o simplemente *espacio* [12, p. 118]) sobre un campo $\mathbb{K}$ tal que

$$(\mathbb{V}, +, \mathbb{K}, *) \,,$$

un conjunto cuyos elementos, se llaman *vectores* (Definición 1.9), tienen dos operaciones: la *adición* '+' (Definición 1.18) y el *producto por un escalar* '$*$' (Definición 1.19).

Math hackers note: La Definición 1.2 es conforme (normalizado para este manual) considerando las definiciones de: [13, Def. 1.1, p. 3], [14, p. 156], [7, Def. 1.1.1, p. 3], [9, p. 167], [10, Def. 2.1.1, p. 20], [15, p. 19], [16, p. 32], [17, p. 1], [18, p. 2], y, [19, Definition, Vector space].

Definición 1.3 (espacio finito e infinito)**.** Es $\mathbb{V}$ un ***espacio de dimensión finita*** si, y solo si, posee una base$^{\to\text{D.1.10}}$; de lo contrario se llama ***espacio de dimensión infinita*** [11, p. 12].

Definición 1.4 (subespacio)**.** Es $\mathbb{W} \neq \varnothing$ un ***subespacio*** (una parte) del espacio $\mathbb{V}$,

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{V},$$

(i.e., un subconjunto) que hereda las propiedades definidas para $\mathbb{V}$.

Definición 1.5 (espacio real)**.** Un espacio$^{\to\text{D.1.2}}$ sobre el campo real$^{\to\text{D.8.10}}$ $\mathbb{R}$ tal que $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, *)$ se llama ***espacio real*** $n-$dimensional y se denota $\mathbb{R}^n$ [20, p. 1],

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) \mid \forall x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.6 (espacio $\mathbb{R}^2$)**.** Espacio real$^{\to\text{D.8.10}}$ en el *plano* (2-D) [20, p. 1] se define como

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.7 (espacio $\mathbb{R}^3$)**.** Espacio real$^{\to\text{D.1.5}}$ en el *espacio* (3-D) [20, p. 1] se define como

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 1.8 (espacio Euclidiano)**.** Un espacio finito$^{\to\text{D.1.3}}$ real$^{\to\text{D.8.10}}$ o complejo$^{\to\text{D.13.1}}$ dotado con el operador *producto punto* '$\cdot$' (Definición 1.20) se llama ***espacio Euclidiano***.

Math hackers note: La Definición 1.8 se establece considerando las definiciones de: [13, p. 22], [8, p. 215], [10, p. 161], [18, p. 16] y [19, Definition, Euclidean space].

1.1.3. Vector

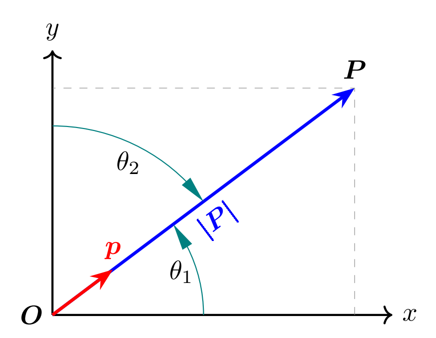
Definición 1.9 (vector)**.** Sea $x_i \in \mathbb{K}$, sea $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{B} \subset \mathbb{V}$, sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces el ***vector*** $\boldsymbol{P} \in \mathbb{V}$ se define (es generado) como,

$$\boldsymbol{P} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i, \qquad (1.1)$$

una *combinación lineal* de los vectores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_n$ [11, p. 11].

Math hackers note: Un vector→D.1.9, según la norma ISO 19123 (2005) [5, p. 1039], Maple 18 [19, Definition, vector], [4, p. 120], se define como una cantidad que tiene dos atributos: una *dirección* (Definición 1.17) así como una *magnitud* (Definición 1.16). Los identificadores que ***representan vectores***, según el SI [21, p. 104] [20, Footnote 1, p. 2], se escriben en letra negrita y cursiva, una letra cursiva con una flecha encima también puede usarse para indicar un vector. La Figura 1.1 [22, p. 255] muestra la representación gráfica (interpretación geométrica) del vector $\boldsymbol{P}$ mediante una *flecha* en la misma dirección→D.1.17 y cuya longitud es proporcional a la magnitud→D.1.16.

Figura 1.1. Vector



1.2. Propiedades

1.2.1. Base y dimensión

Definición 1.10 (base)**.** El conjunto de vectores [22, p. 256],

$$\mathbb{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\} \tag{1.2}$$

se denomina *base del espacio* vectorial [23, p. 16] $\mathbb{V}$ si:

1. $\mathbb{B}$ es Linealmente independiente (Definición 1.12);
2. $\mathbb{B}$ es un Generador de elementos para $\mathbb{V}$ (i.e., cumple Ecuación 1.1).

Definición 1.11 (dimensión)**.** Si $\mathbb{V}$ es un espacio finito (Definición 1.3), su ***dimensión***

$$\dim \mathbb{V} = n$$

es igual al número de elementos que tiene la base.

Math hackers note: Los términos sistema generador, base (Definición 1.10) y dimensión (Definición 1.11) se usa considerando las definiciones de: [7, Def. 1.1.5, p. 3], [16, p. 34] y [18, Def. I.1.4, p. 4].

1.2.2. Dependencia lineal

Definición 1.12 (Linealmente Dependiente e Independiente)**.** De (1.1), si $\boldsymbol{P} = \mathbf{0}$; el conjunto de vectores (1.2) es:

LD si al menos uno de los $x_i \neq 0$;

LI si todos los $x_i = 0$.

1.2.3. Coordenada

Definición 1.13 (coordenada)**.** Una ***coordenada*** es una especificación de componentes x_i del vector→D.1.9, que designa la posición de un punto en el espacio n dimensional

$$\boldsymbol{P} = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

donde cada valor x_i es correspondiente al parámetro base→D.1.10 $\boldsymbol{e}_i$ definido por el sistema de coordenada→D.4.2.

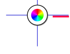
Math hackers note: El término coordenada (Definición 1.13) se establece conforme la norma ISO 19107 [5, p. 993], y considerando las definiciones de: [12, p. 118], [24, p. 136], [1, p. 203], [19, Def., coordinate], y, [18, Def. II.3.5, p. 59].

Un *vector columna* [25, p. 2] es la representación, de la coordenada (Definición 1.13), en formato Matriz columna (Definición 2.17).

Definición 1.14 (coordenada absoluta)**.** es uno que parte del punto $\boldsymbol{O}$ (origen del sistema) y termina en $\boldsymbol{P}$ (i.e., $\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ según la Figura 1.1).

Definición 1.15 (coordenada relativa)**.** es uno que parte de un punto relativo $\boldsymbol{Q}$ y termina en $\boldsymbol{P}$ (i.e., $\overrightarrow{\boldsymbol{QP}}$ según la Figura 1.3).

Math hackers note: un vector puede ser localizado o representado en cualquier lugar, según *coordenada relativa* o *absoluta* (*posición estándar*) conforme con: [24, p. 146], [26, p. 2].



Capítulo 2

Álgebra Matricial

2.1. Fundamentos

2.1.1. Terminología

El *álgebra matricial* cubre la teoría de *matrices* (es decir, la estructura de datos llamada *matriz*). El *método matricial* [6, p. 3], para el estudio de *datos relacionales*; la descripción matemática de magnitudes que requieren dos o más dimensiones. Implementado por el computo interno (producto matricial) en *redes neuronales* [30, time 09:04.552] de una Inteligencia Artificial (AI).

2.1.2. Matriz

Definición 2.1 (matriz)**.** Sea $(\mathbb{K}^{m\times n}, +, \mathbb{K}, *)$ un espacio vectorial sobre el mismo campo $\mathbb{K}$. Entonces la matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es una *representación matricial*, de una función lineal, definida como

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \qquad (2.1)$$

un objeto, con m filas y n columnas, *indexable* [7, p. 6] de la forma

$$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}; \qquad (2.2)$$

y, los elementos en $i = j$ son su *diagonal principal*.

Math hackers note: Una matriz→D.2.1, según lo definido por la ISO/TS 19129, es una serie rectangular de números [31, p. 510].

Los símbolos que ***representan matrices***, de acuerdo nomenclatura SI [21, p. 104], se escriben en letra negrita y cursiva.

2.2. Operadores aritméticos

2.2.1. Suma y resta

Definición 2.2 (adición matricial)**.** Sea $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Entonces $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, tal que

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}. \qquad (2.3)$$

Propiedad 2.1 (adición matricial)**.** Para $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{0} \in \mathbb{K}^{m\times n}$

1. Ley conmutativa

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$$

2. Ley asociativa

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$$

3. Identidad

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$$

4. Inverso

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$$

2.2.2. Multiplicación por un escalar

Definición 2.3 (producto por un escalar)**.** Sea $s \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Entonces $s\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, tal que

$$s\boldsymbol{A} = s\left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}. \qquad (2.4)$$

Propiedad 2.2 (producto por un escalar)**.** Sea $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $u, v \in \mathbb{K}$,

1. Ley asociativa

$$u(v\boldsymbol{A}) = (uv)\boldsymbol{A}$$

2. Identidad
$$1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

3. Ley distributiva
$$u(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = u\boldsymbol{A} + u\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{A}(u+v) = u\boldsymbol{A} + v\boldsymbol{A}$$

2.2.3. Producto matricial

Definición 2.4 (producto matricial)**.** Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times p}$. Entonces $\boldsymbol{AB} \in \mathbb{K}^{m\times p}$, tal que

$$\boldsymbol{AB} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,p}}. \tag{2.5}$$

Propiedad 2.3. del producto matricial:

1. Ley no conmutativa. Para $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$
$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}; \tag{2.6}$$

2. Asociatividad en el producto por un escalar para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times p}$, $u, v \in \mathbb{K}$,
$$u\boldsymbol{A} \times v\boldsymbol{B} = uv(\boldsymbol{AB}); \tag{2.7}$$

3. Ley distributiva. Para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C} \in \mathbb{K}^{n\times p}$,
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}; \tag{2.8}$$

4. Identidad. Para $\boldsymbol{A},\boldsymbol{I} \in \mathbb{K}^{n\times n}$,
$$\boldsymbol{IA} = \boldsymbol{AI} = \boldsymbol{A}; \tag{2.9}$$

5. Bi-Producto. Para $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$,
$$\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{A}^2. \tag{2.10}$$

Axioma 2.1 (producto matricial)**.** Método de computo según (2.5).

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & g & i \\ f & h & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bf & ag+bh & ai+bj \\ ce+df & cg+dh & ci+dj \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.1 (método matricial)**.** Dado dos rectas SVG `<path d="M 0 1 5 3 Z M 1 2 4 0 Z"/>`; calcular el punto de intersección usando el método matricial.

Respuesta. La ecuación de la recta es $mx + b = y$, formando la ecuación matricial para hallar m y b

$$\begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

por tanto, si $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$; los parámetros de la primera recta con (0,1) y (5,3)

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para la segunda recta con (1,2) y (4,0)

$$\begin{bmatrix} m_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 2.667 \end{bmatrix}$$

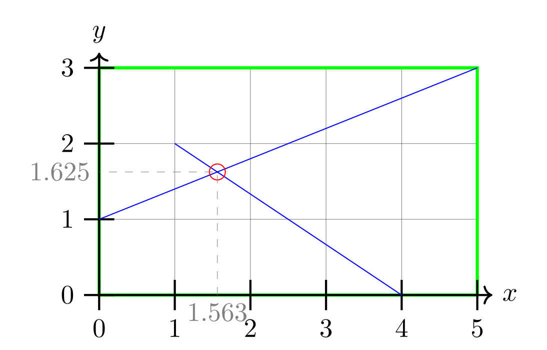
el punto de intersección usando la misma ecuación de la recta

$$\begin{bmatrix} m_1 & -1 \\ m_2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix}$$

si $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ entonces $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ reemplazando datos y dibujando (Figura 2.1)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -1 \\ -0.667 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ -2.667 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.563 \\ 1.625 \end{bmatrix}.$$

Figura 2.1. Intersección entre rectas SVG



2.3. Operadores unarios

2.3.1. Inversa

Definición 2.5 (matriz inversa)**.** Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz *no singular* (2.18). Entonces $\boldsymbol{A}^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es la ***matriz inversa*** (la única), tal que

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{I}. \tag{2.11}$$

Teorema 2.1. *Propiedades de la inversa [16, p. 10], [32, p. 20–22]. Para $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ matrices invertibles,*

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$$

Teorema 2.2 (inversa 2×2)**.** *Método de computo,*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Capítulo 3

Cálculo Vectorial

3.1. Fundamentos

3.1.1. Terminología

El *cálculo vectorial* fue implementado por Maxwell [36] para el estudio de los campos, en la búsqueda de unificar la electricidad (campo eléctrico) y el magnetismo (campo magnético); y así permitir expresar esta relación $\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ de la energía electromagnética (EM) [37, time 05:19.728].

La *geometría diferencial* [13, p. 39] [38, p.37] constituye el estudio del "cálculo en $\mathbb{R}^n$" [23, p. 11]. Las curvas usualmente se representan en forma paramétrica. Las propiedades asociadas con una curva son la curvatura y longitud del arco, estimadores de medida (*geometric invariants*) como la ***curvatura*** y ***torsión*** de la curva.

3.1.2. Curva paramétrica

Definición 3.1 (curva paramétrica)**.** Una función paramétrica→D.4.1 de variable escalar $\boldsymbol{r} : t \in \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, (en el intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$) es una ***curva paramétrica*** C en $\mathbb{R}^n$.

Math hackers note: La Definición 3.1 se establece considerando las definiciones de: [39, p. 50], [13, Def. 2.1, p. 41] [20, Def. 1.1, p. 2].

Definición 3.2 (curva de $\mathbb{R}^2$)**.** Si $n = 2$; i.e., curva en el *plano* (2-D).

Definición 3.3 (curva de $\mathbb{R}^3$)**.** Si $n = 3$, i.e., curva en el *espacio* (3-D).

Definición 3.4 (vector posición)**.** Si las funciones escalares de variable escalar: $r_{1(t)}$, $r_{2(t)}$ y $r_{n(t)}$ son las coordenadas (Definición 1.13), en un instante t el ***vector de posición*** se define como

$$\boldsymbol{r}_{(t)} = \begin{bmatrix} r_{1(t)} \\ r_{2(t)} \\ \vdots \\ r_{n(t)} \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

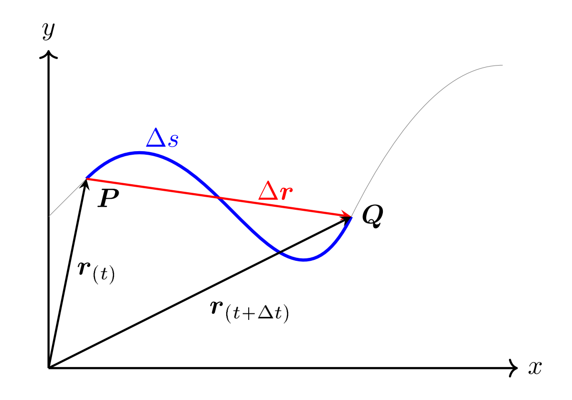
Cuando t varia, se dice que $\boldsymbol{P}$ se mueve en una trayectoria *curva*. Asi por definición de igualdad de vectores,

$$x_1 = r_{1(t)}, \qquad x_2 = r_{2(t)}, \qquad x_3 = r_{n(t)}. \tag{3.2}$$

se hallan las *ecuaciones paramétricas* (3.2) de la curva C en el espacio dimensional n.

Cuando $\boldsymbol{Q}$ se acerca cada vez mas a $\boldsymbol{P}$ (los intervalos Δt son cada vez más pequeños) y $\Delta\boldsymbol{r}$ se aproxima a ser un *vector tangente* a la curva (Figura 3.1).

Figura 3.1. Interpretación de una curva paramétrica



3.1.3. Vector tangente

Definición 3.5 (vector tangente)**.** Sea $\boldsymbol{P}$ un punto en la curva C para el cual $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}_{(t)}$ y $\boldsymbol{Q}$ el punto que corresponde a $\boldsymbol{r}_{(t+\Delta t)}$ entonces el ***vector tangente*** se obtiene diferenciando la Ecuación 3.1, con respecto a su parámetro t, según la definición

$$\boldsymbol{r}'_{(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}_{(t+\Delta t)} - \boldsymbol{r}_{(t)}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{3.3}$$

es un *vector tangente* a la curva C en $\boldsymbol{P}$.

Math hackers note: La “d” de operador derivada en la Ecuación 3.3 es recta según Definición 7.19.

Un punto t_i en una curva en el espacio C se llama *punto singular* de C si $\boldsymbol{r}'_{(t_i)} = 0$, de otro modo, se llama *punto no singular*. Una *función vectorial suave* es una función vectorial que tiene una derivada continua y no tiene puntos singulares.

Si $\boldsymbol{P}_{(t)}$ y $\boldsymbol{Q}_{(t)}$ son funciones vectoriales diferenciables (conforme la Ecuación 3.3), y $u_{(t)}$ una función escalar diferenciable (conforme la Ecuación 7.5), entonces

1. la derivada del producto por un escalar es
$$(u\boldsymbol{P})' = u'\boldsymbol{P} + u\boldsymbol{P}' \,; \tag{3.4}$$
2. la derivada de una suma o resta de funciones
$$(\boldsymbol{P} \pm \boldsymbol{Q})' = \boldsymbol{P}' \pm \boldsymbol{Q}' \,; \tag{3.5}$$
3. la derivada de un Producto (punto o cruz) de funciones
$$(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q})' = \boldsymbol{P}' \otimes \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q}' \,. \tag{3.6}$$

3.1.4. Longitud de curva

El cálculo elemental el *elemento de arco* $\mathrm{d}s$ sobre C se define por
$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2; \tag{3.7}$$
luego por las ecuaciones paramétricas (3.2) y conforme la Ecuación 1.4,
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \left[\left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]^{1/2} \\ &= |\boldsymbol{r}'_{(t)}|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

La ***longitud de la curva*** representada por una función vectorial suave $\boldsymbol{r}_{(t)}$ para $a \leqslant t \leqslant b$, se obtiene integrando las diferenciales de *elemento de arco* $\mathrm{d}s$ (3.8), según la definición
$$l = \int_C \mathrm{d}s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'_{(t)}| \,\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

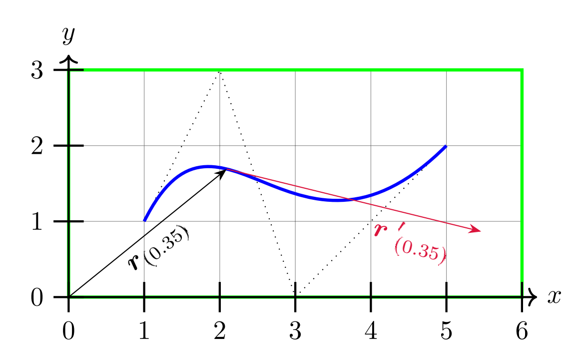
3.1.5. Longitud de arco

La función de *longitud de arco*, $s_{(t)}$, con t como parámetro, se obtiene de la longitud l de C (3.9) desde algun punto fijo t_0 hasta t, entonces
$$s_{(t)} = \int_{t_0}^t |\boldsymbol{r}'_{(t)}| \,\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

Ejemplo 3.1 (geometría de curvas)**.** Dado la siguiente curva SVG `<path d="M 1 1 C 2 3 3 0 5 2"/>`, calcular la longitud de la curva, el vector de posición y tangente cuando se encuentre al 35 %.

Respuesta. Hallando el vector de posición $\boldsymbol{r}_{(t)}$ de la curva Bézier según la ec. (5.87), reemplazando los puntos de control $\mathbf{c}_0$=(1,1), $\mathbf{c}_1$=(2,3), $\mathbf{c}_2$=(3,0) y $\mathbf{c}_3$=(5,2) y su representación visual Figura 3.2 de la ecuación
$$\boldsymbol{r}_{(t)} = \begin{bmatrix} t^3 + 3t + 1 \\ 10t^3 - 15t^2 + 6t + 1 \end{bmatrix};$$
por la ec. (3.3) el vector tangente es
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 3t^2 + 3 \\ 30t^2 - 30t + 6 \end{bmatrix};$$
y el *elemento de arco* basado en la ec. (3.8) es
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3\sqrt{101t^4 - 200t^3 + 142t^2 - 40t + 5};$$
evaluando al 35 % de la curva SVG, es decir en $t = 0.35$
$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{(0.35)} &= (2.09288, 1.69125) \\ \boldsymbol{r}'_{(0.35)} &= (3.3675, -0.825);\end{aligned}$$
la longitud de la curva SVG según la ec. (3.9) es
$$\begin{aligned} l &= 3\int_0^1 \sqrt{101t^4 - 200t^3 + 142t^2 - 40t + 5} \,\mathrm{d}t \\ &= 4.613842820. \end{aligned}$$

Figura 3.2. Vector de Posición y Tangente



3.2. Estimadores de medida

3.2.1. Parametrización natural

Definición 3.6 (vector tangente unitario)**.** se obtiene dividiendo el vector tangente (3.3) por su módulo (3.8),
$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{r}'_{(t)}}{|\boldsymbol{r}'_{(t)}|} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{r}'_{(s)}, \tag{3.11}$$

Capítulo 4

Cálculo Matricial

Topics: Diferenciación matricial · differentiable mappings · sistema de coordenada · coordinate system · CS · geometría de superficies · geometry of surfaces · coordenadas curvilíneas · nonlinear coordinates

4.1. Fundamentos

4.1.1. Terminología

El *cálculo matricial* o la matemática del cambio multidimensional, fundado para el estudio del "cálculo en $\mathbb{R}^{m\times n}$" (mapeo diferencial) [7, p. 149]; elementos de *geometría de superficies* [13, p. 44]; *sistema de coordenadas*; y, *coordenadas curvilíneas* [29, p. 134] [7, p. 152].

4.1.2. Mapeo multidimensional

Definición 4.1 (función paramétrica)**.** Sea $m \wedge n \in \mathbb{N}$. Una función vectorial

$$\boldsymbol{r} : \boldsymbol{u} \in \mathbb{I}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de variable vectorial (en el intervalo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ por cada variable en) $\boldsymbol{u}$; es una ***función paramétrica*** que define (o genera) una figura en el espacio $n-$dimensional.

Math hackers note: Si: $m = 1$, es una curva$^{\to\text{D.3.1}}$; $m = 2$, es una superficie$^{\to\text{D.15.11}}$; $m = 3 = n$, es un sólido$^{\to\text{D.15.15}}$. Si: $n = 2$, figura en el plano$^{\to\text{D.1.6}}$; $n = 3$, figura en el espacio$^{\to\text{D.1.7}}$.

4.1.3. Sistema de coordenada

Definición 4.2 (sistema de coordenada)**.** En un instante $\boldsymbol{u}$, el ***sistema de coordenada*** se define como

$$\boldsymbol{r}_{(\boldsymbol{u})} = \begin{bmatrix} r_{1(\boldsymbol{u})} \\ r_{2(\boldsymbol{u})} \\ \vdots \\ r_{n(\boldsymbol{u})} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

una trasformación (vectorial) de posición, i.e., como las coordenadas $\boldsymbol{u}$ serán asignadas a los puntos en $\mathbb{R}^n$.

Math hackers note: La Definición 4.2 se establece conforme la norma ISO 19111, y (la Ecuación 4.1) considerando las definiciones de: [18, Def. II.3.5, p. 59], [19, Def., coordinate system], [13, ec. (2.3.1), p. 44], [7, p. 152], [29, ec. (5.1), p. 134], [24, p. 143].

Cuando $\boldsymbol{u}$ varia, se dice que existe una ***coordenada*** $\boldsymbol{P}$ en el sistema coordenado cartesiano. Asi por definición de igualdad de vectores

$$x_1 = r_{1(\boldsymbol{u})}, \qquad x_2 = r_{2(\boldsymbol{u})}, \qquad x_n = r_{n(\boldsymbol{u})}, \tag{4.2}$$

donde x_1, x_2, x_n son *coordenadas* de $\boldsymbol{r}$.

La función de trasformación inversa a (4.1),

$$\boldsymbol{u}_{(\boldsymbol{r})} = \begin{bmatrix} u_{1(\boldsymbol{r})} \\ u_{2(\boldsymbol{r})} \\ \vdots \\ u_{m(\boldsymbol{r})} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

y por definición de igualdad de vectores

$$\chi_1 = u_{1(\boldsymbol{r})}, \qquad \chi_2 = u_{2(\boldsymbol{r})}, \qquad \chi_m = u_{m(\boldsymbol{r})}, \tag{4.4}$$

donde χ_1, χ_2, χ_m son *coordenadas* de $\boldsymbol{u}$.

4.1.4. Curvas coordenadas

Definición 4.3 (curva coordenada)**.** Evaluando (4.1) cuando u_i es variable y manteniendo las demas constantes, se define como

$$\boldsymbol{r}_{(u_i)} = \boldsymbol{r}_{(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_m)} \tag{4.5}$$

una curva paramétrica llamada ***curva coordenada***.

Math hackers note: La Definición 4.3 se establece considerando las definiciones de [29, p. 134] y [7, p. 152].

Definición 4.4 (coordenadas curvilíneas)**.** Si las curvas coordenadas→D.4.3 no son líneas rectas, se llaman ***coordenadas curvilíneas***.

Ejemplo 4.1 (curvas coordenadas)**.** Dado el punto $\boldsymbol{P}(6, 37°, 60°)$ en coordendada esférica, hallar las ecuaciones de las curvas coordenadas en el intervalo: radio entre 0 a 6, y los ángulos entre 0° a 90°.

Respuesta. Del vector de posición $\boldsymbol{r}_{(\rho,\theta,\phi)}$ de la superficie esférica según la ec. (4.67); y, procediendo conforme la ec. (4.5): la curva ρ se define cuando ϕ y θ son constantes, i.e., $\boldsymbol{r}_{(\rho)} = \boldsymbol{r}_{(\rho,37°,60°)}$

$$\boldsymbol{r}_{(\rho)} = \begin{bmatrix} \rho \sin 60° \cos 37° \\ \rho \sin 60° \sin 37° \\ \rho \cos 60° \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0.692 \\ 0.521 \\ 0.5 \end{bmatrix};$$

la curva θ se define cuando ρ y ϕ son constantes, i.e., $\boldsymbol{r}_{(\theta)} = \boldsymbol{r}_{(6,\theta,60°)}$

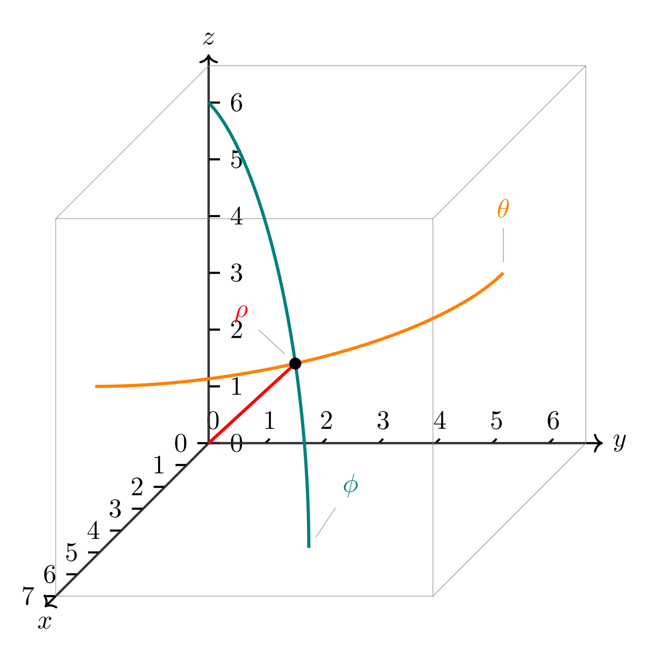
$$\boldsymbol{r}_{(\theta)} = \begin{bmatrix} 6 \sin 60° \cos \theta \\ 6 \sin 60° \sin \theta \\ 6 \cos 60° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.196 \cos \theta \\ 5.196 \sin \theta \\ 3 \end{bmatrix};$$

la curva ϕ se define cuando ρ y θ son constantes, i.e., $\boldsymbol{r}_{(\phi)} = \boldsymbol{r}_{(6,37°,\phi)}$

$$\boldsymbol{r}_{(\phi)} = \begin{bmatrix} 6 \sin \phi \cos 37° \\ 6 \sin \phi \sin 37° \\ 6 \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.792 \sin \phi \\ 3.611 \sin \phi \\ 6 \cos \phi \end{bmatrix};$$

y, su interpretación visual se muestra en la Figura 4.1.

Figura 4.1. Curvas coordenadas



4.1.5. Mapeo diferencial

Definición 4.5 (mapeo diferencial)**.** El *vector tangente* a una curva particular u_i (Definición 4.3) se obtiene diferenciando parcialmente la ec. (4.1) respecto de u_i en cada componente de (4.2), i.e.,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{u_i} &= \lim_{\Delta u_i \to 0} \frac{\boldsymbol{r}_{(u_1,\ldots,u_i+\Delta u_i,\ldots,u_m)} - \boldsymbol{r}_{(u_1,\ldots,u_i,\ldots,u_m)}}{\Delta u_i} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u_i} \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde $\boldsymbol{r}_{u_i}$ es (o retorna) un vector de dimensión n.

4.1.6. Sistema lineal

Definición 4.6 (sistema lineal)**.** Sea el punto $\boldsymbol{P}$ de coordenada curvilínea C para el cual $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}_{(\boldsymbol{u})}$ y $\boldsymbol{Q}$ el punto para $\boldsymbol{r}_{(\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{u})}$. Entonces un vector tangente en el punto $\boldsymbol{P}$ es la resultante del ***sistema de vectores tangente***, cada uno definida (4.6) por una combinación lineal (1.1) como,

$$\boldsymbol{t}_{u_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \boldsymbol{e}_j, \qquad \forall i \in \mathbb{N} \mid [1, m], \tag{4.7}$$

un ***sistema lineal*** con i ecuaciones.

Definición 4.7 (ecuación matricial)**.** Expresando la ec. (4.7) como una ecuación matricial formado por m vectores tangente cada uno de dimensión n,

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'_{(\boldsymbol{u})} \boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{r}'_{(\boldsymbol{u})} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial u_i} \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \tag{4.8}$$

donde $\boldsymbol{t}$ es el vector de tangentes; $\boldsymbol{E}$ es el vector base del *Sistema de Referencia Global* y finalmente $\boldsymbol{r}'_{(\boldsymbol{u})}$ es la ***matriz de vectores tangente*** [13, Eq. (2.3.3), p. 44] (o simplemente *Matriz de tangentes*) con i, j sus índices de fila y columna respectivamente, conforme la definición de matriz (2.2).

4.1.7. Matriz Jacobiano

El Jacobiano de $\boldsymbol{r}$ en $\boldsymbol{u}$, por definición [7, p. 127] es igual al determinante de la transpuesta de la matriz de tangentes (4.8) y aplicando la propiedad de determinates (2.14) se define como

$$J_{(\boldsymbol{u})} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = |\boldsymbol{r}'^{\,T}_{(\boldsymbol{u})}| = |\boldsymbol{r}'_{(\boldsymbol{u})}| \tag{4.9}$$

$\boldsymbol{r}_{(\boldsymbol{u})}$ es ***sobreyectiva*** [18, p. 42] cuando $\boldsymbol{r}'_{(\boldsymbol{u})}$ no es una matriz nula, es decir, es *uniforme* si $J \neq 0$. Los puntos donde $\boldsymbol{r}$ es sobreyectiva se llaman puntos ***regulares***.



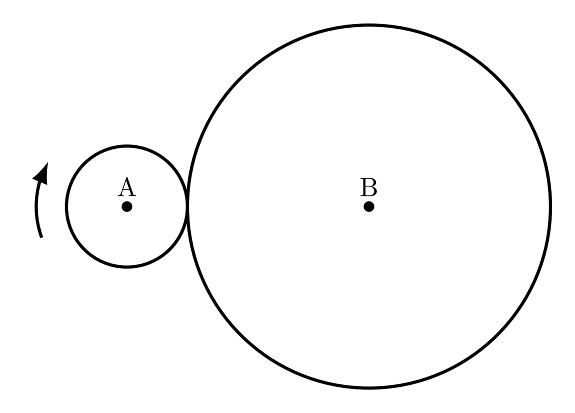
15.4.3. Two Circle Problem (Rotación)

En 1982 el SAT [133, time 09:41.204] planteo la pregunta 17 [133, time 00:39.263] de la siguiente manera:

Problema 15.2. En la Figura 15.24. El radio del círculo A es 1/3 del radio del círculo B. Partiendo de la posición mostrada en la figura, el círculo A gira alrededor del círculo B. ¿Al final de cuántas revoluciones del círculo A el centro del círculo llegará primero a su punto inicial?

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) 6 (D) $\frac{9}{2}$ (E) 9

Figura 15.24. Two Circle Problem (Rotación)



Discusión. La respuesta correcta es 3 revoluciones, (B). Pero es *refutable* ya que el problema no especifica el sistema de referencia completo. Aceptando que "*El planteamiento del problema tenia errores*" [133, time 09:19.819 y 09:25.692] lleva a admitir que 4 revoluciones (no disponible en las opciones de solución) es otra respuesta correcta. Según el sistema de referencia ambas respuestas son válidas, y considerando las opciones de respuesta, se establece (B) como la respuesta correcta.

Terminología. Los términos *revolución*, *rotación* (rotar o rodar, movimiento circular), *gira* (De girar), y *órbita* se usan según lo definido por [48] y [19, Def., rotation].

Definición 15.19 (revolución)**.** Rotación de una figura alrededor de un eje, que configura un sólido o una superficie.

Definición 15.20 (rotación)**.** Acción de dar vueltas alrededor de un eje.

Motivación. Lo motivante del Problema 15.2 es su implicación en examenes de admisión universitaria (opciones de solución disponibles, terminología, ambigüedad en el planteamiento); en la astronomia (movimiento de un astro a lo largo de una órbita completa); y en la mecánica (giro o vuelta que da una pieza sobre su eje), como los engranajes en un motor.

Planteamiento de la solución. Medir la revolución (valor del ángulo) requiere definir el sistema de referencia (i.e., un sistema de coordenadas) sobre el círculo A: eje $\boldsymbol{\omega}$ de rotación; y, eje $\boldsymbol{u}$ de referencia cero.

Eje $\boldsymbol{\omega}$: ubicado en el centro de círculo A, con dirección levógiro.

Eje $\boldsymbol{u}$: (desde el cual parte el ángulo) origen en el centro de A y fin en el centro de B.

Definir el vector $\boldsymbol{u}$ es crítico, y puede darse dos casos: radial o perpendicular.

- **radial** (coordenada polar): el vector $\boldsymbol{u}$ con punto origen variable (su dirección varia) mientras rota sobre el centro de B; o,
- **perpendicular** (coordenada perpendicular): el vector $\boldsymbol{u}$ con punto origen en el punto inicial, i.e., mantiene su dirección (es constante) mientras rota sobre el centro de B.

Considerando que el problema indica "*alrededor*" lo que implica (o se infiere) una referencia radial.

Ejemplo 15.9 (radial)**.** Solución del Problema 15.2 bajo referencia radial (Figura 15.25).

Según datos del problema, la relación de radios:

$$r_B = 3r_A;$$

una revolución de A (desde el eje u), corresponde a una longitud de arco (15.13)

$$a = 2\pi r_A,$$

la longitud de arco total a recorrer (sobre B) es

$$L = 2\pi r_B,$$

el número revoluciones con relación a la longitud de arco

$$L = na,$$

realizando operaciones y reemplazando datos

$$n = \frac{L}{a} = \frac{2\pi r_B}{2\pi r_A} = \frac{3r_A}{r_A} = 3.$$

Ejemplo 15.10 (Perpendicular)**.** Solución del Problema 15.2 bajo referencia perpendicular (Figura 15.26).

Según datos del problema, la relación de radios:

$$r_B = 3r_A,$$

longitud de arco en A y B

$$a = 2\pi r_A, \; L = 2\pi r_B = 6\pi r_A,$$

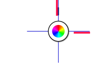
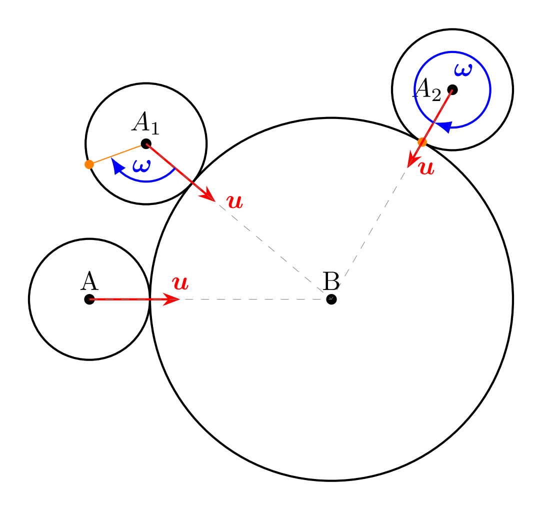


Figura 15.25. Sistema de referencia Radial



ángulo por longitud de arco

$$a = \alpha r_B, \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2\pi r_A}{3r_A} = \frac{2}{3}\pi,$$

$$a = \lambda r_A, \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi r_A}{r_A} = 2\pi,$$

ángulo desde el eje $\boldsymbol{u}$

$$\omega = \alpha + \lambda = \frac{8}{3}\pi,$$

longitud de arco total (hasta el punto de partida)

$$L = ma, \quad \rightarrow \quad m = \frac{L}{a} = 3,$$

ángulo de barrido total (hasta el punto de partida)

$$\Psi = m\omega = 3(\frac{8}{3}\pi) = 8\pi,$$

número de revoluciones con relación al ángulo (si una revolución (360°) es igual a 2π)

$$\Psi = n(2\pi), \quad \rightarrow \quad n = \frac{\Psi}{2\pi} = 4.$$

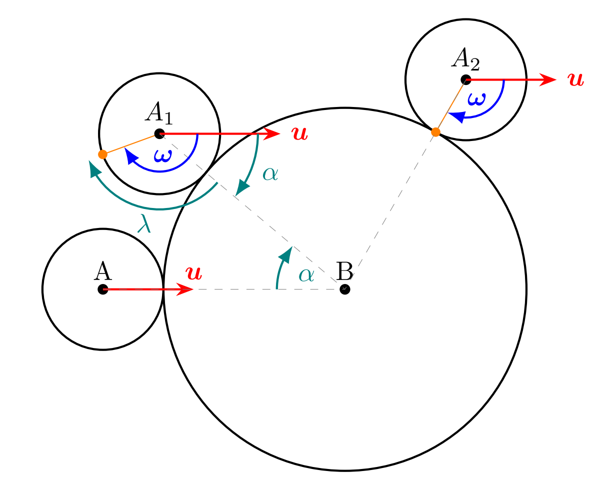
Ejemplo 15.11 (demostración práctica)**.** Computo de los valores de calibración gráfica (Figura 15.27), en relación con la Figura 15.26, cuando $r_A = 1$, y $r_B = 3$.

$$a = \alpha r_B,\ a = \lambda r_A,\ \rightarrow\ \alpha = \lambda \frac{r_A}{r_B} = \frac{1}{3}\lambda,$$

$$\omega = \alpha + \lambda = \frac{4}{3}\lambda,$$

$$\alpha = \omega - \lambda = \frac{1}{4}\omega.$$

Figura 15.26. Sistema de referencia perpendicular



Para el instante A_1: evaluando cuando

$$\omega = 160°;\ \rightarrow\ \lambda = 120°,\ \alpha = 40°.$$

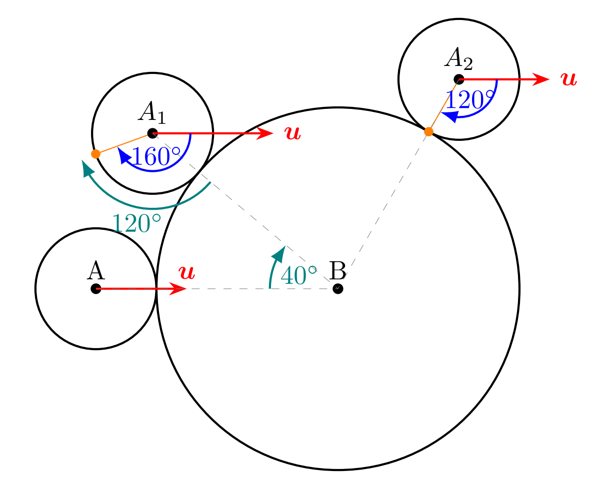
Para el instante A_2: evaluando cuando

$$\lambda = 360°;\ \rightarrow\ \alpha = 120°,\ \omega = 480°.$$

Este último muestra que, a la longitud de arco $2\pi r_A$, completa una rotación e inicia una nueva con el ángulo

$$\omega = 480° - 360° = 120°.$$

Figura 15.27. Demostración (práctica) de referencias



Capítulo 19

Geodesia

19.1. Latitud

Definición 19.1 (curva eliptica)**.** Sea $a \wedge b \in \mathbb{R} \mid [0, \infty[$ constantes y $\theta \in \mathbb{R} \mid [0, 2\pi[$ la variable. Entonces una curva paramétrica→D.3.1 de la elipse→D.5.25 se define como

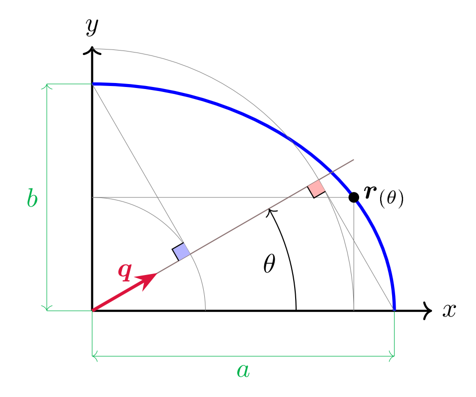
$$\boldsymbol{r}_{(\theta)} = \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{19.1}$$

Math hackers note: La ec. (19.1) es un extendido de ec. (4.41) tal que: son constantes $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, con θ el ángulo en el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Asi, cuando θ varia entre 0 y 2π (i.e., desde 0° hasta 360°) define un punto específico (Figura 19.1) en la curva eliptica de un *meridiano* en el plano.

19.1.1. Latitud reducida

Definición 19.2 (θ, latitud reducida)**.** el parámetro θ de la curva eliptica (19.1) se llamada ***latitud reducida*** o *ángulo reducido* [144, Eq (1.6), p. 8].

Figura 19.1. Latitud reducida



El ángulo θ, como director (Figura 19.2) apunta a un *punto aparente* $\boldsymbol{\varrho}_{(\theta)}$, la dirección de este vector al cual llamaremos 'q' minuscula porque se trata de un versor el cual es:

$$\boldsymbol{q}_{(\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \tag{19.2}$$

Partiendo de la propiedad trigonométrica $\tan(\theta) = y/x$,

$$x = \frac{y}{\tan\theta}$$

reemplazando en la (5.10) y simplificando

$$y = \sqrt{\frac{a^2b^2\tan^2(\theta)}{b^2 + a^2\tan^2(\theta)}}$$

encontramos el vector de *posición del punto aparente* a la cual apunta el ángulo reducido

$$\boldsymbol{\varrho}_{(\theta)} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\tan(\theta)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \tan(\theta) \end{bmatrix} \tag{19.3}$$

19.1.2. Latitud geocéntrica

Definición 19.3 (Φ, latitud geocéntrica)**.** En la Figura 19.2 en términos de cosenos directores $\boldsymbol{r}_{(\theta)}$ se encuentra en dirección de Φ, llamado *ángulo geocéntrico* que en áreas de geodesia se conoce como *latitud geocéntrica* [144, Fig. 1.2 (p. 8)].

partiendo de la propiedad trigonométrica $\tan(\Phi) = y/x$ y reemplazando los valores de la Ecuación 19.1 entonces el *ángulo geocéntrico* se define como

$$\tan(\Phi) = \frac{b}{a}\tan(\theta) \tag{19.4}$$

Ejemplo 19.1 (Latitud geocéntrica y punto aparente)**.** Si se tiene $a = 4$, $b = 3$ y $\theta = 30°$. Hallar ϱ y Φ con una presición de 10^{-6}.

Reemplazando en (19.3) y (19.4) respectivamente se tienen los resultados

Capítulo 20

Informe de implementación

20.1. Introducción

20.1.1. Acerca de este documento

Esta especificación define las caracteristicas (principios, conceptos, definiciones) fundamentales de la *Matemática*, como lenguaje superior (simbólico estándar) universal.

20.1.2. Estado de este documento

Status: *Final Release*. Este es un documento técnico normativo (a nivel MDT496 ESTUDIOS) que puede ser actualizado, reemplazado o dejado obsoleto por una nueva versión en cualquier momento. El documento es un trabajo en estudio, cuya especificación incluye una serie de anotaciones que se está utilizando para agregar al documento principal (véase *issues* MDT496 ESTATUS→P.203).

20.1.3. Objetivos

- Ser "El documento" base de investigación y desarrollo *matemático*.
- Integrar todos los formularios universitarios de MDT496.
- Explotar el potencial matemático, tanto en investigación avanzada, análisis y diseño vectorial, aplicado en programación de aplicaciones geodesicas.
- Dar soporte, estándar y testing unitario, a librerias de diseño gráfico vectorial (SVG).
- Dar soporte para el desarrollo de librerias para generar Planos Georeferenciados (Geodesia).

No es un objetivo ser un manual didactico, una guia para profesores o estudiantes; o, un libro de divulgación.

20.1.4. Referencias normativas

Sistema de control de citas y referencias. Esta sección establece la *literatura matemática* que sirve como base normativa para consolidar el contenido del presente documento.

Alfa | Fundacional

1. `Cardano1545` [146] Ars magna or The Rules of Algebra
2. `Bombelli1579` [128] L'Algebra (El álgebra)
3. `Newton1687` [147] Philosophiæ naturalis principia mathematica

4. `Bourdon1849` [148] Elementos de Álgebra
5. `Bourdon1843` [149] Elementos de Aritmética

Bravo | Fundacional Editorial MIR

6. `Faddieev1971` [12] Problemas de Álgebra superior
7. `Suvorov1973` [58] Matemáticas superiores
8. `Ikramov1990` [11] Problemas de Álgebra lineal
9. `Pozniak1991a` [86] Fundamentos del análisis matemático 1
10. `Pozniak1991b` [39] Fundamentos del análisis matemático 2
11. `Pozniak1991c` [150] Fundamentos del análisis matemático 3
12. `Zeldovich1973` [151] Higher Mathematics for Beginners and its Application to Physics
13. `Bugrov1984` [152] A Collection of Problems
14. `Dorofeev1982` [153] Elementary Mathematics
15. `Dorofeiev1973` [122] Temas Selectos De Matematicas Elementales
16. `Efimov1984` [154] Higher Mathematics (Part 1)
17. `Gantmacher1959` [155] The Theory of Matrices (Vol 2)
18. `Gelfand1963` [156] Calculus of Variations
19. `Gnedenko1978` [157] Theory of Probability
20. `Ilyin1982` [158] Fundamentals of Mathematical Analysis
21. `Korshunov1970` [159] Fundamentos Matematicos de la Cibernetica
22. `Mishchenko1988` [160] Differential Geometry and Topology
23. `Piskunov1977` [54] Calculo Diferencial e Integral Tomo I
24. `Piskunov1977b` [161] Calculo Diferencial e Integral Tomo II
25. `Pogorelov1974` [134] Geometria elemental
26. `Potapov1986` [31] Algebra y analisis de funciones elementales
27. `Samarski1982` [162] Metodos de solucion de las ecuaciones reticulares Tomo I
28. `Samarski1983` [163] Metodos de solucion de las ecuaciones reticulares Tomo II
29. `Shariguin1989` [164] Problemas de geometria Planimetria
30. `Tolstov1962` [165] Fourier Series
31. `Volkovyski1977` [166] Problemas sobre la teoria de funciones de variable compleja
32. `Vygodsky1987` [4] Mathematical Handbook (Higher Mathematics)
33. `Wentzel1982` [167] Probability Theory
34. `Yakovlev1988a` [168] High School Mathematics Part 1



